Proseminar

Digitale Rechenanlagen

WS 2021/2022

PARIS LODRON UNIVERSITÄT SALZBURG

Übungszettel 2

6. Gegeben sind die Zeichenvorräte A, B. Berechnen Sie allgemein:

   (a) die Anzahl der möglichen Codewörter $|A^n|$ der Länge n, sowie $|B^m|$.

   (b) die Anzahl der möglichen Codewörter mit *maximaler* Länge n: $|A^0 \cup \ldots \cup A^n|$.

   (c) die Anzahl der möglichen Codewörter $|(A \cup B)^{m+n}|$ mit gemeinsamem Zeichenvorrat.

   (d) die Anzahl der konkatenierten Codewörter $|A^n \circ B^m|$.

   Demonstrieren Sie die Ergebnisse am Beispiel $A = \{a, b, c\}$, $n = 2$, $B = \{1, 2\}$, $m = 3$.

7. Die Levenshteindistanz ist eine Verallgemeinerung der Hammingdistanz. Während bei der Hammingdistanz die Anzahl der Schritte gezählt wird, mit denen man durch Austausch eines Zeichens das eine Wort in das andere verwandelt, sind bei der Levenshteindistanz auch das Einfügen und Entfernen eines Zeichens (an beliebiger Stelle) erlaubt. Zum Beispiel ist wegen $0101 \to 101 \to 1010$ die Levenshteindistanz zwischen 0101 und 1010 gleich 2, während die Hammingdistanz gleich 4 ist. Bestimmen Sie die Hamming- und Levenshteindistanz der Wörter

   $$01010101 \qquad \text{und} \qquad 10110010\,.$$

8. Für eine natürliche Zahl $n > 2$ ist folgende Abbildung gegeben: $c : \{2, 3, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}^4$ mit $c(k) = abcd$, wobei $k = 7^a 5^b 3^c 2^d e$, und die natürliche Zahl e nicht durch 2, 3, 5, 7 teilbar ist. Also z. B. $c(6) = 0011$, weil $6 = 7^0 5^0 3^1 2^1 1$.

   Ist diese Abbildung für $n = 10$ ein decodierbarer Code?
   Gibt es ein n, für das der Code nicht decodierbar ist? Falls ja, wie lautet das kleinste solche n?
   Gibt es ein n, für das diese Konstruktion gar kein Code ist? Falls ja, wie lautet das kleinste solche n?
   Begründen Sie Ihre Antworten.

9. Geben Sie alle Codewörter des Codes $c : \{0, \ldots, 7\} \longrightarrow \{0, 1\}^*$ an:

   $c(k) := c_3(k)$, wobei

   $c_m(k) := c_{m-1}(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor) \circ u(k)$,

   $u(k) = 0$ wenn k gerade, $u(k) = 1$ wenn k ungerade,

   $c_0(k) = \lambda$ (das leere Wort).

10. Der Golomb-Rice-Code mit Parameter M ist folgendermaßen definiert:

    $$c(n) = 0^q 1 r_{l-1} \ldots r_0, \quad l = \log_2 M, \quad q = \lfloor n/M \rfloor, \quad r = n - qM, \quad r_k = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \lfloor r 2^{-k} \rfloor \text{ gerade} \\ 1 & \text{wenn } \lfloor r 2^{-k} \rfloor \text{ ungerade} \end{cases}$$

    Beispiel: für $M = 2$ ist $c(5) = 0011$.

    Bestimmen Sie die Codewörter und deren Länge für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 11$ und $M = 1, 2, 4$.